

ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ ГРОССА—НЕВЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА

А. С. ВШИВЦЕВ, А. Г. КИСУНЬКО, К. Г. КЛИМЕНКО, Д. В. ПЕРЕГУДОВ

Аннотация. В работе предложена регулярная процедура (основанная на использовании дзета-функции Римана—Эпштейна) вычисления эффективного потенциала модели Гросса—Неве на двумерной решетке с различными типами граничных условий, моделирующими эффекты конечного объема и температуры. Для разных типов граничных условий построены эффективный потенциал и фазовые структуры модели. Показано, что в двумерии (в отличие от трехмерного случая) фазовая картина не зависит от константы связи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение нелинейных моделей теории поля, в частности σ -модели и ее модификаций: CP^{N-1} -модели, суперсимметричной σ -модели и др., имеет под собой серьезные причины и историю [1]. С одной стороны использование моделей такого рода (σ -модель в $2 + 1$ -мерном пространстве-времени) при описании планарного антиферромагнетизма у высокотемпературных сверхпроводников в несверхпроводящей фазе [2]. При этом исследования различных авторов [1,3] указывают на связь результатов, получаемых в решеточных моделях и их предельных непрерывных случаях (длинноволновый предел). Этот предел можно поставить в соответствие континуальной квантовой модели антиферромагнитного спинового взаимодействия. Для $O(3)$ σ -модели в работе [4] в двумерии устанавливалась связь с нейтронными экспериментами на La_2CuO_4 . Кроме того, лагранжиан этой модели с учетом слагаемых, нарушающих симметрию, успешно используется для описания основного состояния неелевского антиферромагнетика и возникающих над ним низкоэнергетических возбуждений — спиновых волн [5].

С другой стороны, двумерная σ -модель перенормируема [6] и обладает рядом свойств, имеющих аналоги в квантовой хромодинамике (инстантоны, асимптотическая свобода, динамический механизм нарушения симметрии и др.) [7]. Этот аспект данной модели определяет интерес к ней физиков, интересующихся элементарными частицами и проблемами физики высоких энергий, в частности, моделями адронов. Заметим, что основной акцент в исследовании этих моделей был сделан на изучении изменения свойств системы при изменении размерности, а также решении проблемы перенормируемости. Также проводились исследования по учету конечной температуры и некоторых типов внешних полей [8].

Вместе с тем, существует еще один аспект в изучении моделей такого рода — исследование влияния топологии (и этот факт отмечался еще в работах [9,10]). В

этих работах указывалось на роль топологии для CP^{N-1} -моделей в описании явления сверхпроводимости в CuO смесях. При этом рассмотрение даже простейшего двумерного варианта теории с различными граничными условиями оказывается весьма интересным с физической точки зрения, так как мы имеем топологию тора, а различные граничные условия либо соответствуют учету конечного объема системы, либо позволяют ввести температуру.

С учетом сказанного, нашей задачей будет описание общей процедуры, основанной на вычислении дзета-функции Римана—Эпштейна, которая позволяет учитывать различные топологии простого типа при вычислении термодинамического и эффективного потенциалов, необходимых для описания широкого класса свойств изучаемых систем. Наш подход существенным образом использует теоретико-числовые свойства дзета-функции Римана—Эпштейна. Это дает возможность получить ряд точных функциональных соотношений, которые охватывают все типы граничных условий. Заметим, что полученные нами соотношения пока распространены на двумерную решетку и дают обобщения таких хорошо известных в физике твердого тела соотношений как формулы Маделунга [11]. Вместе с тем область возможного приложения полученных нами результатов не ограничивается рассмотренным в работе примером.

Имеется ряд моделей теории поля, которые приводят к задаче о вычислении дзета-функции оператора Гельмгольца на пространстве типа $T^n \times R^m$. В настоящей работе мы также посвятим некоторое внимание разработке методов вычисления дзета-функции оператора Гельмгольца на пространстве $T^2 \times R^{\lambda-2}$ и применим эти методы к исследованию модели Гросса—Неве.

Обычно в теории поля используется тот или иной вариант петлевого разложения. При этом “однопетлевой” член представляет собой логарифм регуляризованного детерминанта оператора квадратичной формы “свободного” лагранжиана. Часто этот оператор является оператором Гельмгольца, поэтому встает задача о вычислении логарифма регуляризованного детерминанта оператора Гельмгольца. Как известно, вычисление и регуляризацию удобно производить, используя дзета-функцию соответствующего оператора.

Помимо уже упомянутой модели Гросса—Неве, можно привести другие примеры систем, которые приводят к задаче о вычислении дзета-функции оператора Гельмгольца. Среди них можно назвать эффект Казимира при конечной температуре [12], топологическое нарушение симметрии и топологическую генерацию массы, топологическую генерацию члена Черна—Саймонса в трехмерных калибровочных теориях, модели квантовой гравитации в пространствах с топологией тора.

2. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ

В этом разделе мы изложим связь эффективного потенциала с дзета-функцией.

Пусть A — оператор с положительно определенными собственными значениями, λ_n — его собственные значения. Эффективным потенциалом будем называть выражение

$$(1) \quad V_A = \sum_n \ln \lambda_n$$

Конечно, часто такое выражение расходится, поэтому под эффективным потенциалом понимается некоторая его регуляризация. Ее удобно произвести, введя дзета-функцию оператора A

$$(2) \quad \zeta_A(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}$$

Если λ_n достаточно быстро стремятся к бесконечности с ростом n (например, для оператора Гельмгольца $\lambda_n \sim n^2$), то при достаточно большой $\Re s$ ряд сходится. Учитывая формулу $(a^x)' = a^x \ln a$, будем понимать расходящееся выражение для V_A как предел при $s \rightarrow 0$ производной от $\zeta_A(s)$:

$$(3) \quad V_A = -\zeta'_A(0)$$

В квантовой гравитации эта формула служит основой метода регуляризации при помощи дзета-функции. Поскольку при $s = 0$ ряд для дзета-функции заведомо расходится, мы сталкиваемся здесь с примером так называемой аналитической регуляризации. В отличие от регуляризации, скажем, Паули-Вилларса, когда регуляризованное выражение определено при всех значениях регулятора M , а при $M \rightarrow \infty$ расходится, при нашей регуляризации дзета-функция определена только для s с достаточно большой вещественной частью, то есть начинает расходиться задолго до $s = 0$. Поэтому существенную роль играет аналитическое продолжение дзета-функции.

Следует отметить отличие нашего подхода от подходов других авторов, в частности, [13]. Мы с самого начала концентрируемся на простейшей дзета-функции, соответствующей оператору Лапласа на двумерном торе — дзета-функции Эпштейна

$$(4) \quad Z(a, b; s) = \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} (a^2 n^2 + b^2 m^2)^{-s},$$

— выражая через нее эффективный потенциал оператора Гельмгольца с помощью интегрального преобразования и учитывая различные (периодические и антипериодические) граничные условия комбинированием дзета-функций от разных параметров. Авторы работ [13] с самого начала рассматривают общий случай оператора Гельмгольца с произвольными граничными условиями, что делает формулы громоздкими и практически не позволяет продвинуться в их анализе. Нам удалось существенно продвинуться в вычислении частных значений дзета-функции Эпштейна. Наиболее известным подобным результатом является маделунговская сумма $\sum_{(m, n) \neq (0, 0)} (m^2 + n^2)^{-s} = 4\zeta(s)\beta(s)$, где $\beta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}$. Поэтому область применения найденных формул для частных значений дзета-функции Эпштейна не ограничивается теорией поля на торе, они могут оказаться полезными в других моделях, в частности, в физике твердого тела.

Дальнейшее изложение строится следующим образом. В разделе 3 подробно вычисляется эффективный потенциал оператора Гельмгольца на цилиндре $S^1 \times R^{\lambda-1}$. Результаты этого вычисления в некоторых случаях были ранее получены некоторыми авторами иными способами. Цель раздела 3 — на простом примере изложить

приемы, которые непосредственно переносятся на более сложный случай в разделе 4. Там мы рассматриваем оператор Гельмгольца на торе $T^2 \times R^{\lambda-2}$ и показываем, что вычисление эффективного потенциала в случаях периодических и антипериодических граничных условий сводится к изучению дзета-функции Эпштейна. В разделе 5 производится аналитическое продолжение дзета-функции Эпштейна способом, аналогичным продолжению дзета-функции Римана. Это приводит нас к функциональному уравнению и позволяет сразу вычислить ряд частных значений дзета-функции. Однако у полученной в разделе 5 формулы аналитического продолжения есть недостаток — она явно симметрична по a и b , что затрудняет построение асимптотики $a \ll b$. Поэтому в разделе 6 мы строим другое аналитическое продолжение дзета-функции Эпштейна, которое дает удобную асимптотическую формулу при $a \ll b$. В разделе 7 мы приводим формулы для частных значений дзета-функции Эпштейна при некоторых соотношениях между a и b . Основной идеей является факторизация двукратного ряда, входящего в определение дзета-функции Эпштейна, так что она в существенном представляется в виде произведения обычной дзета-функции Римана на так называемые L -функции Дирихле. Формулы подобного рода весьма специфичны, и возможность факторизации двукратного ряда связана с тонкими арифметическими свойствами конкретных чисел. Вполне вероятно, что число таких формул вообще конечно. В разделе 8 приведены функциональные уравнения для L -функций Дирихле. Они позволяют выполнять необходимое аналитическое продолжение этих функций. Наконец, в разделе 9 мы применяем развитые методы к исследованию модели Гросса—Неве на торе. Примененные нами методы позволили провести полный анализ уравнения стационарности и построить фазовый портрет системы при различных типах граничных условий.

3. ОПЕРАТОР ГЕЛЬМГОЛЬЦА $-\Delta + m^2$ НА ЦИЛИНДРЕ $S^1 \times R^{\lambda-1}$

Рассмотрим “эффективный потенциал” оператора Гельмгольца на цилиндре:

$$(5) \quad \Omega = \int \frac{d^{\lambda-1}k}{(2\pi)^{\lambda-1}} \frac{a}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln[k^2 + a^2(n + \alpha)^2 + m^2].$$

(Случай $\alpha = 0$ соответствует периодическим, а $\alpha = 1/2$ — антипериодическим граничным условиям.) Первым делом обезразмерим и регуляризуем это выражение. Рассмотрим

$$(6) \quad \Omega(s) = \int \frac{d^{\lambda-1}k}{(2\pi)^{\lambda-1}} \frac{a}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k^2 + a^2(n + \alpha)^2 + m^2}{\mu^2} \right)^{-s}.$$

При $\Re s > \lambda/2$ интеграл и ряд сходятся. Учитывая формулу $(a^x)' = a^x \ln a$, будем понимать расходящееся выражение (1) как предел при $s \rightarrow 0$ производной от (2):

$$(7) \quad \Omega = -\Omega'(s)|_{s=0}.$$

Для вычисления $\Omega(s)$ прежде всего используем представление Швингера:

$$(8) \quad a^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-at} dt.$$

Тогда (2) примет вид:

$$(9) \quad \Omega(s) = \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int \frac{d^{\lambda-1}k}{(2\pi)^{\lambda-1}} \frac{a}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-(k^2+a^2(n+\alpha)^2+m^2)t} dt.$$

Теперь меняем местами интегрирование по k и суммирование по n с интегрированием по t , после чего интеграл по импульсам вычисляется, ряд же пересуммируем по Пуассону:

$$(10) \quad \Omega(s) = \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2s} \frac{\Gamma(s-\lambda/2)}{\Gamma(s)} + \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} (4\pi t)^{-\lambda/2} 2 \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi^2 n^2 / ta^2} \cos(2\pi n\alpha) \right) e^{-m^2 t} dt.$$

Дальнейшего продвижения достигнем, представляя сумму в виде обратного меллиновского образа:

$$(11) \quad \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi^2 n^2 / ta^2} \cos(2\pi n\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^{2\nu}} \right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-2\nu} d\nu,$$

где контур C — прямая, параллельная мнимой оси и лежащая справа от особенностей подынтегрального выражения. После подстановки интеграл по t вычисляется, и мы находим:

$$(12) \quad \Omega(s) = \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2s} \frac{\Gamma(s-\lambda/2)}{\Gamma(s)} + \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m}\right)^{2s} \frac{2}{\Gamma(s)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu+s-\lambda/2) \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^{2\nu}} \right) \left(\frac{\pi m}{a}\right)^{-2\nu} d\nu.$$

Производная $\Omega'(s)$ от первого слагаемого в (8) вычисляется по-разному в зависимости от того, является λ четным или нечетным:

$$(13) \quad \Omega_1 = \begin{cases} -\frac{(-1)^n}{n!} \frac{m^{2n}}{(4\pi)^n} \left(\psi(n+1) + \gamma + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right), & \text{при } \lambda = 2n, \\ -\frac{m^{2n+1}}{(4\pi)^{n+1/2}} \Gamma(-n-1/2), & \text{при } \lambda = 2n+1. \end{cases}$$

Производная от второго слагаемого равна:

$$(14) \quad \Omega_2 = -\frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \frac{2}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu-\lambda/2) \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^{2\nu}} \right) \left(\frac{\pi m}{a}\right)^{-2\nu} d\nu.$$

Дальнейшее вычисление эффективного потенциала производится при помощи теоремы о вычетах. Результат имеет характер разложения по степеням m/a .

Стоящий здесь ряд в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1/2$ соответственно равен

$$(15) \quad \sum_{n=1}^\infty n^{-2\nu} = \zeta(2\nu), \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^{2\nu}} = (2^{1-2\nu} - 1)\zeta(2\nu).$$

В общем случае

$$(16) \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^s} = \frac{(2\pi)^s}{4\Gamma(s) \cos(\pi s/2)} [\zeta(1-s, \alpha) + \zeta(1-s, 1-\alpha)]$$

4. ОПЕРАТОР ГЕЛЬМГОЛЬЦА $-\Delta + m^2$ НА ТОРЕ $T^2 \times R^{\lambda-2}$

Аналогичным образом может быть получено следующее выражение для “эффективного потенциала” оператора Гельмгольца на торе:

$$(17) \quad \Omega(s) = \int \frac{d^{\lambda-2}k}{(2\pi)^{\lambda-2}} \frac{ab}{(2\pi)^2} \sum_{n,l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k^2 + a^2(n+\alpha)^2 + b^2(l+\beta)^2 + m^2}{\mu^2} \right)^{-s} =$$

$$= \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m} \right)^{2s} \frac{\Gamma(s-\lambda/2)}{\Gamma(s)} + \frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \left(\frac{\mu}{m} \right)^{2s} \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_C \Gamma(\nu)\Gamma(\nu+s-\lambda/2) \left(\sum_{\substack{l,n=-\infty \\ (l,n) \neq (0,0)}}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi n\alpha) \cos(2\pi l\beta)}{(n^2/a^2 + l^2/b^2)^\nu} \right) (\pi m)^{-2\nu} d\nu,$$

Производная от первого слагаемого в (13) уже обсуждалась, а производная от второго равна:

$$(18) \quad \Omega_2 = -\frac{m^\lambda}{(4\pi)^{\lambda/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu)\Gamma(\nu-\lambda/2) \left(\sum_{\substack{l,n=-\infty \\ (l,n) \neq (0,0)}}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi n\alpha) \cos(2\pi l\beta)}{(n^2/a^2 + l^2/b^2)^\nu} \right) (\pi m)^{-2\nu} d\nu.$$

В случае $\alpha = 0, \beta = 0$ стоящая в формуле сумма называется дзета-функцией Эпштейна (1). В случаях $\alpha = 1/2, \beta = 0$ и $\alpha = 1/2, \beta = 1/2$ сумма также сводится к Z -функции:

$$(19) \quad \sum_{\substack{l,n=-\infty \\ (l,n) \neq (0,0)}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(a^2 n^2 + b^2 l^2)^\nu} = 2Z(2a, b; \nu) - Z(a, b; \nu),$$

$$(20) \quad \sum_{\substack{l,n=-\infty \\ (l,n) \neq (0,0)}}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+n}}{(a^2 n^2 + b^2 l^2)^\nu} = Z(a, b; \nu) - 2[Z(2a, b; \nu) +$$

$$+ Z(a, 2b; \nu)] + 4Z(2a, 2b; \nu) =$$

$$= (1 + 2^{2-2\nu})Z(a, b; \nu) - 2[Z(2a, b; \nu) + Z(a, 2b; \nu)]$$

Теперь мы сконцентрируемся на трех частных случаях: полностью периодических граничных условий, полностью антипериодических и смешанных. Как видно, для дальнейших вычислений в формуле (4) необходимо знать аналитические свойства и частные значения дзета-функции Эпштейна.

5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ $Z(a, b; s)$

Основной нашей целью в этом разделе будет аналитическое продолжение дзета-функции Эпштейна $Z(a, b; s)$. Мы воспользуемся приемом, аналогичным тому, который использовал Риман для своей дзета-функции. Это приведет нас, во-первых,

к функциональному уравнению для $Z(a, b; s)$, аналогичному римановскому, а во-вторых, к формуле для вычисления $Z(a, b; s)$ при любых $s \neq 1$.

Выполним сначала некоторые приготовления. Введем функцию

$$(21) \quad \omega(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad \omega(1/x) = x^{1/2} \omega(x).$$

Нам понадобится также функция $\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$. Очевидно, что $2\theta(x) + 1 = \omega(x)$.

Будем вычислять $(ab/\pi)^s \Gamma(s) Z(a, b; s)$.

$$(22) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \int_0^{\infty} \sum_{\substack{m, n=-\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} e^{-x(a^2 n^2 + b^2 m^2)} x^{s-1} dx.$$

Совершим масштабное преобразование $x = \pi t/ab$. Тогда

$$(23) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \int_0^{\infty} \sum_{\substack{m, n=-\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} e^{-\pi t \left(\frac{a}{b} n^2 + \frac{b}{a} m^2\right)} t^{s-1} dt.$$

Если теперь в сумму (5) добавить член $n = 0, m = 0$, то она распадется на произведение ω -функций

$$(24) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \int_0^{\infty} \left(\omega\left(\frac{ta}{b}\right) \omega\left(\frac{tb}{a}\right) - 1 \right) t^{s-1} dt.$$

Вспоминая ω -функции, найдем следующее соотношение для функции $f(a, b; t) = \omega(ta/b)\omega(tb/a) - 1$

$$(25) \quad f(a, b; t) = \frac{1}{t} \left[f\left(a, b; \frac{1}{t}\right) + 1 \right] - 1.$$

Разбиваем теперь интеграл по интервалу $[0, \infty)$ на интегралы по отрезку $[0, 1]$ и интервалу $[1, \infty)$ и делаем в первом из них замену $f(a, b; t)$ по приведенной формуле. Получаем

$$(26) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 f(a, b; 1/t) t^{s-2} dt + \int_1^{\infty} f(a, b; t) t^{s-1} dt.$$

Теперь в первом интеграле меняем переменную интегрирования $t \rightarrow 1/t$ и объединяя оба интеграла и выражая результат через θ -функции, окончательно найдем

$$(27) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b; s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(2\theta\left(\frac{ta}{b}\right) + 2\theta\left(\frac{tb}{a}\right) + 4\theta\left(\frac{ta}{b}\right)\theta\left(\frac{tb}{a}\right) \right) (t^s + t^{1-s}) \frac{dt}{t}.$$

Интегралы в правой части сходятся при любом s , таким образом мы получили аналитическое продолжение функции $Z(a, b; s)$. Видно, что единственной особой точкой $Z(a, b; s)$ является $s = 1$, в которой она имеет полюс первого порядка. Заметим, что правая часть симметрична относительно замены $s \rightarrow 1 - s$, поэтому имеет место функциональное уравнение

$$(28) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) = \left(\frac{ab}{\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s)Z(a, b; 1-s).$$

Приведем в заключение несколько сразу очевидных частных значений

$$(29) \quad Z(a, b; 0) = -1, \quad \Re_{s=1} Z(a, b; s) = \frac{\pi}{ab}, \quad Z(a, b; -k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

6. ФОРМУЛА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ АСИМПТОТИКИ $a \ll b$

В предыдущем пункте мы получили формулу аналитического продолжения для Z -функции. Для вычисления частных значений она не очень удобна, так как, во-первых, содержит интегралы с θ -функциями, а, во-вторых, явно симметрична по a и b . Не надеясь получить точное аналитическое выражение по a и b , мы должны стремиться найти хотя бы разложение при $a \ll b$. Поэтому мы вернемся назад и получим еще одно аналитическое продолжение для Z -функции, которое окажется несимметричным по a и b и будет давать быстро сходящийся ряд для Z при $a \ll b$.

Мы начнем с формулы (5) предыдущего пункта. Сумму по m разделим на две части: член с $m = 0$ и остаток:

$$(30) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) = \int_0^\infty \left(2 \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi t \frac{a}{b} n^2} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t \left(\frac{a}{b} n^2 + \frac{b}{a} m^2\right)} \right) t^{s-1} dt.$$

Интеграл от первой суммы сразу вычисляется, ряд по n пересуммируем по Пуассону

$$(31) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) = 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{-s} [\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s)] + \\ + \int_0^\infty 2 \sqrt{\frac{b}{at}} \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi b}{ta} n^2 - \pi t \frac{b}{a} m^2} t^{s-1} dt.$$

Теперь уже в сумме по n выделяем слагаемое с $n = 0$, оставшийся интеграл сводится к функции Макдональда

$$(32) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) = 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{-s} [\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s)] + \\ + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{s-1} [\pi^{-s+1/2} \Gamma(s-1/2) \zeta(2s-1)] + \\ + 8 \sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m,n=1}^\infty \left(\frac{n}{m}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2} \left(2\pi mn \frac{b}{a}\right)$$

Ряд сходится (и достаточно быстро) при любых s , так что мы имеем аналитическое продолжение Z -функции. Используя функциональное уравнение для ζ -функции, можно переписать эту формулу в виде

$$(33) \quad \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s)Z(a, b; s) = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{-s} [\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)] + \\ + 2\left(\frac{a}{b}\right)^{s-1} [\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)] + \\ + 8\sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}\left(2\pi mn\frac{b}{a}\right)$$

Теперь очевидно, что правая часть симметрична относительно замены $s \rightarrow 1-s$, поэтому мы опять получаем функциональное уравнение (7).

Очевидно, что в случае $a \ll b$ первые два члена справа дают степенную и (возможно) логарифмическую асимптотику по a/b , сумма же дает вклад, пропорциональный $\exp(-2\pi b/a)$.

Для целых s сумма может быть сведена к однократной. Например

$$(34) \quad Z'(a, b; 0) = \frac{\pi b}{3a} + \ln \frac{a^2}{4\pi^2} + I(b/a),$$

где I может быть записан в двух формах

$$(35) \quad I(x) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-2\pi nx}) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{e^{2\pi nx} - 1}.$$

Другой вариант однократной суммы получается, если представить сумму функций Макдональда в виде

$$(36) \quad 8\sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{s-1/2} K_{s-1/2}\left(2\pi mn\frac{b}{a}\right) = \\ = 8\sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-s+1/2} K_{s-1/2}\left(2\pi l\frac{b}{a}\right) \left(\sum_{d|l} d^{2s-1}\right).$$

(Символ $d|l$ означает, что суммирование ведется по делителям числа l). Внутренняя сумма конечна и для небольших l вычисляется вручную, например

$$(37) \quad I(x) = 4 \left(e^{-2\pi x} + \frac{3}{2}e^{-4\pi x} + \frac{4}{3}e^{-6\pi x} + \dots \right)$$

Заметим еще, что, поскольку дзета-функция Эпштейна симметрична по a и b , функция $I(x)$ также обладает некоторым свойством симметрии:

$$(38) \quad I(x) = \frac{\pi}{3x} - \frac{\pi x}{3} + 2 \ln x + I(1/x)$$

7. ЧАСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЭПШТЕЙНА

Из интегрального представления для эффективного потенциала оператора Гельмгольца на торе $T^2 \times R^{\lambda-2}$ следует, что мы должны изучить аналитические и теоретико-числовые свойства следующей функции:

$$(39) \quad Z(a, b; \mu, \nu; s) = \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} (a^2 n^2 + b^2 m^2)^{-s} \cos(2\pi \mu n) \cos(2\pi \nu m),$$

через которую выражается эффективный потенциал (со спектром вида: $k^2 + (a^2(n + \mu)^2 + b^2(m + \nu)^2)$). Заметим, что случаи $\mu = 0, \nu = 1/2$; $\mu = 1/2, \nu = 0$; $\mu = 1/2, \nu = 1/2$ могут быть сведены к изучению случаев $\mu = \nu = 0$ с изменением масштаба величин a и b . С учетом сказанного мы исследуем свойства функции вида

$$(40) \quad Z(a, b; s) = Z(a, b; 0, 0; s) = \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} (a^2 n^2 + b^2 m^2)^{-s}$$

Величины a и b можно связать с периодами двумерной решетки, на которой определена функция $Z(a, b; s)$. В теории известны некоторые частные соотношения для функции $Z(a, b; s)$, например, при $a = b$ это так называемые маделунговские суммы. В настоящем разделе мы поставим задачу о возможном перечислении периодов a и b , при которых существуют соотношения аналитического типа. Нахождение соотношений такого рода может оказаться полезным для физики кристаллов, а также возможно позволит получить ряд простых результатов для эффективного потенциала в некоторых реперных точках, с которыми возможно сравнивать асимптотические результаты. Следует указать, что упрощение для представления функции $Z(a, b; s)$ можно ожидать в том случае, когда ее представление в виде

$$(41) \quad Z(a, b; s) = \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} (a^2 n^2 + b^2 m^2)^{-s} = \sum_{n_1 \in N} r_f(n_1) n_1^{-s},$$

где $r_f(n_1) = r(n_1, a, b)$, в силу факторизации $r_f(n_1)$ позволяет провести одно из суммирований (по n или по m), приводящее к произведению известных теоретико-числовых функций: дзета-функции, L -функций Дирихле и элементарных. Таким образом, задача, к которой мы пришли — исследование бинарной диагональной квадратичной формы [14] вида $f(n, m) = a^2 n^2 + b^2 m^2$. Поскольку в литературе отсутствуют соответствующие утверждения относительно свойств конкретных форм, мы приведем соответствующие утверждения и рассмотрим серию конкретных примеров, полезных для приложений.

Решение задачи можно сформулировать следующим образом.

Теорема. Пусть задана форма $f(n, m) = an^2 + bm^2$, где a и b — взаимнопростые натуральные числа, b нечетно, $d = -4ab$ — дискриминант формы, $\Delta = ab$ — ее степень. Предположим, что Δ принимает одно из шестидесяти пяти удобных чисел Эйлера, то есть $\{\Delta = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28,$

30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 93, 102, 105, 112, 120, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848}.

Тогда при $\Delta \neq 1$ число $r_f(n_1) = r(n_1, a, b)$ вычисляется по следующей формуле:

$$(42) \quad r(n_1, a, b) = 2^{-v} \chi_2 \left(\prod_{p|\Delta} \chi_p \right) \left(\sum_{d|u} \left(\frac{-\Delta}{d} \right) \right).$$

Здесь

$$(43) \quad v = \begin{cases} t, & \text{если } \Delta \equiv 1 \pmod{4} \text{ или } \Delta \equiv 0 \pmod{8} \\ t - 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

t — число простых делителей Δ , p — нечетное простое число, $u = \prod_{\substack{p|n_1 \\ p \nmid 2\Delta}} p^\beta$, где $p^\beta \parallel n_1$, то есть p^β — наибольшая степень p , являющаяся делителем n_1 , а u — часть числа n_1 , взаимнопростая с 2Δ . Пусть $n_1 = 2^\alpha \left(\prod_{p|\Delta} p^\beta \right) k$, $\Delta = 2^\gamma \left(\prod_p p^l \right)$. Символ $\left(\frac{-\Delta}{d} \right)$, где d — нечетное число, означает обобщенный символ Якоби [15].

Итак, в формуле (42) определены все величины, кроме χ_p и χ_2 , вычисление которых мы дадим ниже.

Вычисление $\chi_p = \chi_p(n_1, a, b)$, где $p|\Delta$, то есть $l > 0$ и $p^l \parallel \Delta$.

Пусть $p^l \parallel a^*$, $(a_*, p) = 1$, то есть числа a_* и p — взаимно простые [15], где a^* , a_* — надлежащая перестановка чисел a, b .

I. Рассмотрим случай $\beta < l$. Тогда

- 1) β — четное, то $\chi_p = \left(1 + \left(\frac{p^{-l} n_1 a_*}{p} \right) \right) p^{\beta/2}$,
- 2) β — нечетное, $\chi_p = 0$.

II. $\beta \geq l$. Тогда

- 1) β — четное, l — нечетное

$$\chi_p = \left[1 - \left(\frac{-p^{-l} \Delta}{p} \right) \frac{1}{p} \right] \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{-p^{-l} \Delta}{p} \right) \right] \frac{\beta - l}{2} \right\} p^{l/2}$$
- 2) β — нечетное, l — четное

$$\chi_p = \left[1 - \left(\frac{-p^{-l} \Delta}{p} \right) \frac{1}{p} \right] \left[1 + \left(\frac{-p^{-l} \Delta}{p} \right) \right] \frac{\beta - l + 1}{2} p^{l/2}$$
- 3) l — нечетное

$$\chi_p = \left[1 + \left(\frac{p^{-l} \Delta}{p} \right)^{\beta+1} \frac{p^{-(l+\beta)} n_1 a_*}{p} \right] p^{(l-1)/2}$$

Вычисление $\chi_2 = \chi_2(n_1, a, b)$.

Поскольку b — нечетное, то $a = 2^\gamma c$, где c — нечетно и $\gamma \geq 0$, $n_1 = 2^\alpha m$, m — нечетно и $\alpha \geq 0$.

I. γ — четное, α — четное.

1) $\alpha \geq \gamma$

1.1) если $c \equiv b \pmod{4}$, то в этом случае

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m-c}{2}} \right] 2^{\gamma/2}$$

1.2) если $c \equiv -b \pmod{4}$, то в этом случае

1.2.1 при $\alpha = \gamma$, $\chi_2 = 2^{\gamma/2}$

1.2.2 при $\alpha > \gamma$

$$\chi_2 = \left[2 - (-1)^{\frac{c+b}{4}} \right] 2^{\gamma/a} + \left[1 + (-1)^{\frac{c+b}{4}} \right] (\alpha - \gamma - 2) 2^{\gamma/2-1}$$

2) $\alpha = \gamma - 2$

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m-b}{2}} \right] 2^{\alpha/2}$$

3) $\alpha \leq \gamma - 4$

3.1 $m \equiv b \pmod{8}$, в этом случае

$$\chi_2 = 2^{\alpha/2+2}$$

3.2 $m \not\equiv b \pmod{8}$, в этом случае $\chi_2 = 0$.

II. γ — четное, α — нечетное.

1. $0 < \alpha \leq \gamma - 1$, $\chi_2 = 0$

2. $\alpha \geq \gamma + 1$, тогда

2.1 если $c \equiv -b \pmod{4}$, то

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{c-b}{4} + \frac{m-c}{2}} \right] 2^{\gamma/2}$$

2.2 если $c \equiv b \pmod{4}$, то

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{c-b}{4}} \right] (\alpha - \gamma - 1) 2^{\gamma/2-1}$$

III. γ — нечетное, α — четное.

1. при $\alpha \geq \gamma - 1$

1.1 если $m \equiv b \pmod{4}$, то

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m-b}{4}} \right] 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

1.2 если $m \equiv -b \pmod{4}$, то

$$\chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m+b}{4} + \frac{m-c}{2}} \right] 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

2. $\alpha \leq \gamma - 3$

2.1 если $m \equiv b \pmod{8}$, то $\chi_2 = 2^{\alpha/2+2}$

2.2 если $m \not\equiv b \pmod{8}$, то $\chi_2 = 0$

IV. γ — нечетное, α — нечетное.

1. если $\alpha \leq \gamma - 2$, то $\chi_2 = 0$

2. если $\alpha \geq \gamma$, тогда имеем

$$2.1 \ m \equiv c \pmod{4}, \chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m-c}{4}} \right] 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

$$2.2 \ m \equiv -c \pmod{4}, \chi_2 = \left[1 + (-1)^{\frac{m+c}{4} + \frac{m-b}{2}} \right] 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

Формулировка теоремы завершена и мы приступаем к рассмотрению примеров. Однако прежде заметим, что при $\Delta = 1$ (случай Якоби) формулу для $r(n_1, a, b)$ необходимо умножить на 2.

$$(44) \quad \begin{aligned} Z(1, 1; s) &= 4\zeta(s)L(s, \chi_{-4}); & Z(1, 2; s) &= 2\zeta(s)L(s, \chi_{-4})(1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}) \\ Z(1, \sqrt{3}; s) &= 2\zeta(s)L(s, \chi_{-3})(1 + 2^{1-2s}), & Z(1, \sqrt{2}; s) &= 2\zeta(s)L(s, \chi_{-8}) \\ Z(1, \sqrt{7}; s) &= 2\zeta(s)L(s, \chi_{-7})(1 - 2^{-s} + 2^{1-2s}) \\ Z(1, \sqrt{5}; s) &= \zeta(s)L(s, \chi_{-20}) + L(s, \chi_{-4})L(s, \chi_5) \end{aligned}$$

8. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ L -ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

Как уже говорилось, для вычисления эффективного потенциала нужно знать аналитические свойства дзета-функции Эпштейна, в частности, важную роль играет ее аналитическое продолжение. В предыдущем разделе мы получили ряд формул, которые сводят вычисление дзета-функции к вычислению L -функций Дирихле [14]. В этом разделе мы приводим (без доказательства) функциональные уравнения для L -функций Дирихле, которые позволяют осуществлять аналитическое продолжение этих функций.

В силу свойств характеров Дирихле $\chi^2(-1) = \chi(1) = 1$. Характер Дирихле называется четным (нечетным), если $\chi(-1) = 1$ ($\chi(-1) = -1$). Характер $\chi(n)$ называется примитивным характером $(\text{mod } q)$, если q — наименьший период функции $\chi(n)$. Выражение

$$(45) \quad \tau(\chi) = \sum_{m=1}^q \chi(m)e^{2\pi in/q}$$

называется суммой Гаусса.

Пусть $\chi(n)$ — четный примитивный характер, $\bar{\chi}(n)$ — комплексно сопряженный характер. Тогда

$$(46) \quad \pi^{-(1-s)/2} q^{(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}) = \frac{q^{1/2}}{\tau(\chi)} \pi^{-s/2} q^{s/2} \Gamma(s/2) L(s, \chi)$$

Для нечетного характера равенство выглядит по-другому:

$$(47) \quad \pi^{-(2-s)/2} q^{(2-s)/2} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}) = \frac{iq^{1/2}}{\tau(\chi)} \pi^{-(s+1)/2} q^{(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi)$$

Как видно, для вещественных характеров приведенные соотношения действительно дают функциональные уравнения для L -функций Дирихле. Оказывается, что

вещественные примитивные характеры можно отождествить с символами Кронекера $\left(\frac{d}{n}\right)$, где d есть произведение взаимнопростых множителей вида $-4, 8, -8, (-1)^{(p-1)/2}p$ (где $p > 2$), причем положительным d соответствуют четные характеры, а отрицательным d — нечетные.

9. МОДЕЛЬ ГРОССА—НЕВЕ НА ТОРЕ T^2

Здесь мы вычислим эффективный потенциал модели Гросса—Неве изложенным выше методом на пространстве T^2 с граничными условиями разных типов и исследуем с его помощью спонтанное нарушение симметрии в этой модели. Заметим, что в [16] предпринималась попытка проведения изучения этой модели, однако она страдает значительным числом недостатков. В частности, сами авторы [16] так и не сумели в дальнейших исследованиях обосновать предлагаемый вид приведенной в работе фазовой диаграммы. С тем чтобы снять этот вопрос и проиллюстрировать предложенную нами процедуру, мы разберем данную модель в общем случае граничных условий. Лагранжиан имеет вид

$$(48) \quad L = \sum_k \left[\bar{\psi}_k i \hat{\partial} \psi_k + \sigma \bar{\psi}_k \psi_k \right] - N \sigma^2 / 2f,$$

Однопетлевой эффективный потенциал равен

$$(49) \quad V(\sigma_c) / N = \sigma_c^2 / 2f - \Omega$$

где

$$(50) \quad \Omega = \frac{ab}{(2\pi)^2} \sum_{p,q} \ln \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{a^2 p^2 + b^2 q^2} \right)$$

Суммирование по q и p зависит от граничных условий. При периодических условиях суммирование идет по целым числам, при антипериодических — по полуцелым. Видно, что Ω соответствует нашим прежним обозначениям с точностью до замены $m \rightarrow \sigma_c$ и вычитания значения потенциала при $\sigma_c = 0$. Мы избежим проблем с нулевой модой, если будем рассматривать антипериодические условия по крайней мере по одной координате. Потенциал Ω представляется в виде суммы двух слагаемых, Ω_1 и Ω_2 . Для Ω_1 формула (3) дает:

$$(51) \quad \Omega_1 = \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left(1 + \ln \frac{\mu^2}{\sigma_c^2} \right).$$

Будем нормировать Ω_1 условием:

$$(52) \quad \left. \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \sigma_c^2} \right|_{\sigma_c = \sigma_0} = 0$$

(Это означает, что производная от однопетлевого потенциала при $a = 0, b = 0$ равна производной от древесной его части.) Тогда

$$(53) \quad \Omega_1 = \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left(3 + \ln \frac{\sigma_0^2}{\sigma_c^2} \right).$$

Другая распространенная параметризация — через положение минимума потенциала (то есть массу фермиона)

$$(54) \quad \frac{1}{N} \frac{\partial V}{\partial \sigma_c} \Big|_{\sigma_c=M} = 0.$$

Параметры σ_0 и M связаны равенством $M = \sigma_0 \exp(1 - \pi/f)$. Часть Ω_2 потенциала зависит от граничных условий. Мы собираемся рассмотреть два случая: 1) антипериодические условия по координате $(\text{mod } 2\pi/a)$ и периодические условия по координате $(\text{mod } 2\pi/b)$, 2) антипериодические условия по обеим координатам. Как было показано выше, нужно сначала вычислить потенциал с периодическими условиями по обеим координатам (см. формулу (4)):

$$(55) \quad \Phi(a, b; \sigma_c) = -\frac{\sigma_c^2}{4\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(\nu) \Gamma(\nu - 1) Z(1/a, 1/b; \nu) (\pi^2 \sigma_c^2)^{-\nu} d\nu.$$

Заметим, что произведение $\Gamma(\nu) Z(1/a, 1/b; \nu)$ имеет, согласно (6), только два полюса: $s = 0$ и $s = 1$. Поэтому подынтегральное выражение имеет полюсы второго порядка в точках $s = 0$ и $s = 1$ и полюсы первого порядка в точках $s = -k$, $k = 1, 2, \dots$

$$(56) \quad \Phi(a, b; \sigma_c) = -\frac{ab}{4\pi^2} \left[\frac{\pi b}{3a} + \ln \frac{a^2}{4\pi^2 \sigma_c^2} + I(b/a) \right] - \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left[1 - 2\gamma - \frac{\pi b}{3a} - \ln \frac{\sigma_c^2}{4b^2} - I(b/a) \right] + O(\sigma_c^4)$$

Нужные нам потенциалы вычисляются теперь по формулам

$$(57) \quad \Omega_2^{AP}(a, b; \sigma_c) = 2\Phi(a/2, b; \sigma_c) - \Phi(a, b; \sigma_c) - [2\Phi(a/2, b; 0) - \Phi(a, b; 0)],$$

$$(58) \quad \Omega_2^{AA}(a, b; \sigma_c) = 2\Omega_2^{AP}(a, b/2; \sigma_c) - \Omega_2^{AP}(a, b; \sigma_c)$$

(Индексы AP и AA означают периодичность (P) и антипериодичность (A) по координате.) Мы находим

$$(59) \quad \Omega_2^{AP} = -\frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left[1 - 2\gamma - \frac{\pi b}{a} - \ln \frac{\sigma_c^2}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] + O(\sigma_c^4),$$

$$(60) \quad \Omega_2^{AA} = -\frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left[1 - 2\gamma - \ln \frac{4\sigma_c^2}{b^2} - 5I(b/a) + 2I(2b/a) + 2I(b/2a) \right] + O(\sigma_c^4)$$

Имея явное выражение для потенциалов, мы можем исследовать спонтанное нарушение симметрии в модели. Выпишем полностью эффективный потенциал V^{AP} :

$$(61) \quad V^{AP}(\sigma_c)/N = \sigma_c^2/2f + \frac{\sigma_c^2}{4\pi} \left[-2 - 2\gamma - \ln \frac{\sigma_0^2}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] + O(\sigma_c^4)$$

Условия стационарности гласят

$$(62) \quad \frac{1}{N} \frac{\partial V^{AP}}{\partial \sigma_c} = \sigma_c / f + \frac{\sigma}{2\pi} \left[-2 - 2\gamma - \frac{\pi b}{a} - \ln \frac{\sigma_0^2}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] + O(\sigma^3) = 0,$$

По крайней мере в пределе $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ точка $\sigma_c = 0$ не является минимумом потенциала, поэтому будем считать, что и при некоторых ненулевых a , b это так. Мы можем тогда сократить на σ в уравнении:

$$(63) \quad \frac{1}{f} + \frac{1}{2\pi} \left[-2 - 2\gamma - \frac{\pi b}{a} - \ln \frac{\sigma_0^2}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] + O(\sigma^2) = 0,$$

При $\sigma_c^2 = 0$ мы получаем уравнение фазовой кривой:

$$(64) \quad \frac{1}{f} + \frac{1}{2\pi} \left[-2 - 2\gamma - \frac{\pi b}{a} - \ln \frac{\sigma_0^2}{4b^2} - 2I(2b/a) + I(b/a) \right] = 0,$$

Его можно упростить, введя перенормированные параметры

$$(65) \quad \tilde{a} = \frac{2a}{\sigma_0} \exp\left(\frac{\pi}{f} - 1 - \gamma\right), \quad \tilde{b} = \frac{2b}{\sigma_0} \exp\left(\frac{\pi}{f} - 1 - \gamma\right),$$

Тогда

$$(66) \quad \frac{\pi \tilde{b}}{\tilde{a}} - 2 \ln \tilde{b} + 2I(2\tilde{b}/\tilde{a}) - I(\tilde{b}/\tilde{a}) = 0$$

Введем параметр $x = \tilde{b}/\tilde{a}$, тогда уравнение фазовой кривой записывается в параметрическом виде:

$$(67) \quad \tilde{b} = \exp\left(\frac{\pi x}{2} + I(2x) - I(x)/2\right), \\ \tilde{a} = \tilde{b}/x.$$

Поскольку $I(x)$ достаточно быстро убывает при $x \rightarrow \infty$, такое представление хорошо работает для x в интервале, скажем, $x > 1$. На интервале $0 < x < 1$ воспользуемся свойством симметрии функции $I(x)$, тогда

$$(68) \quad \tilde{b} = 4x \exp(I(1/2x) - I(1/x)/2), \\ \tilde{a} = \tilde{b}/x.$$

Качественный вид фазовой кривой представлен на рис. 1. Будем считать b обратной длиной пространственного измерения, по которому наложены периодические условия, а a — температурой (напомним, что в модели Гросса—Неве мацубаровское суммирование идет по нечетным частотам). Основным результатом состоит

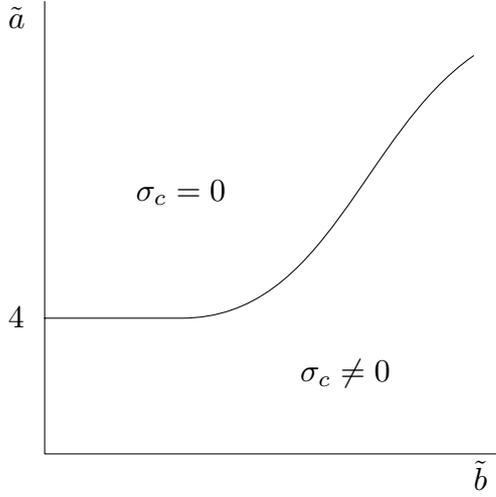


Рис. 1. Фазовая диаграмма в случае антипериодических условий по координате $(\text{mod } 2\pi/a)$ и периодических условий по координате $(\text{mod } 2\pi/b)$

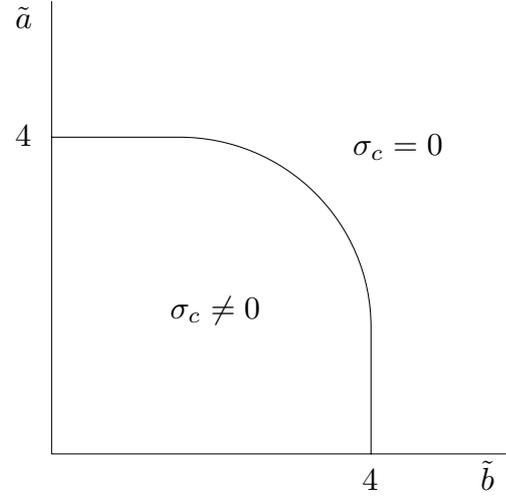


Рис. 2. Фазовая диаграмма в случае антипериодических условий по обеим координатам

в том, что для любой длины пространственного измерения имеется фазовый переход. Если температура ниже температуры фазового перехода, то $\sigma_c \neq 0$, если же выше, то $\sigma_c = 0$. В пределе бесконечного объема ($\tilde{b} \rightarrow 0$) имеем связь температуры фазового перехода с массой фермиона $M = \pi T_{\text{ф}} e^{-\gamma}$. В отличие от трехмерного случая картина совершенно не зависит от значения константы связи. При изменении константы связи рис. 1 только масштабируется.

Аналогично рассматривается случай полностью антипериодических граничных условий. Уравнение фазовой кривой имеет вид:

$$(69) \quad \ln \frac{\tilde{b}}{4} - \frac{5}{2}I(\tilde{b}/\tilde{a}) + I(2\tilde{b}/\tilde{a}) + I(\tilde{b}/2\tilde{a}) = 0$$

В параметрической форме

$$(70) \quad \begin{aligned} \tilde{b} &= 4 \exp\left(\frac{5}{2}I(x) - I(2x) - I(x/2)\right), \\ \tilde{a} &= \tilde{b}/x \end{aligned}$$

В этом случае фазовая кривая симметрична относительно замены a на b , поэтому достаточно построить ее для $x > 1$. Качественная картина представлена на рис. 2. Придерживаясь прежней интерпретации a и b , мы видим, что, в случае антипериодических условий по пространственной координате, существует критическая длина $L = (\pi/M)e^{-\gamma}$. Если длина пространственного измерения больше критической, то существует фазовый переход. При температурах ниже температуры фазового перехода $\sigma_c \neq 0$, выше $\sigma_c = 0$. Если же длина пространственного измерения меньше критической, то всегда $\sigma_c = 0$. В пределе бесконечного объема ($\tilde{b} \rightarrow 0$) связь температуры фазового перехода с массой фермиона $M = \pi T_{\text{ф}} e^{-\gamma}$ та же, что и в предыдущем случае, что не удивительно, ибо в этом пределе граничные условия по пространственной координате не играют роли.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена регулярная процедура описания свойств эффективных потенциалов теорий на двумерных решетках. Способ описания основывается на использовании свойств дзета-функции Римана—Эпштейна и ее аналитическом продолжении, а также обобщении как ранее рассмотренных результатов [13,17], так и построенных новых точных функциональных соотношений типа маделунговских. Использование теоретико-числовых свойств дзета-функции позволило единым образом учесть различные типы граничных условий. Следует указать, что различные типы граничных условий можно поставить в соответствие либо конечному объему системы, либо введению такого важного физического параметра, как температура. Отметим также, что в физике твердого тела, например, для электрона проводимости в магнитном поле используется спектр вида [14]

$$(71) \quad \varepsilon = A_1 \cos k_x a_x + A_2 \cos k_y a_y,$$

то есть двоякопериодическая решетка. Таким образом, рассмотрение двоякопериодической структуры, проведенное в настоящей работе, возможно будет перенести и на другие задачи, используя развитый выше аппарат. На основе предложенной процедуры проведено исследование фазовой структуры модели Гросса—Неве в двумерии на торе. Проведенный анализ модели показывает, что в случае нетривиальной топологии тора в отличие от непрерывного имеет место спонтанное нарушение симметрии в системе. Также отличительной чертой двумерия с нетривиальной топологией от трехмерия состоит в том, что фазовая картина не зависит от константы связи при смешанных граничных условиях.

Таким образом, наше рассмотрение показывает, что наличие нетривиальной топологии, которое может быть обусловлено различной физической природой — температурой, конечными размерами системы, периодической зависимостью спектра от импульса [14] и другими эффектами может привести к изменению физически наблюдаемых — генерации массы в модели Гросса—Неве. Все это указывает на необходимость детального изучения “простых” моделей на которые обращалось внимание в ряде работ [1,5,9,12] и интерес к которым не иссяк и в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Л. Д. Ландау, 1995.
2. X. Endoh et al, Phys. Rev. **B37** (1988), 7443; R. J. Birgenem et al, Phys. Rev. **B38** (1988), 6614.
3. E. Fradkin, M. Stone, Phys. Rev. **B38** (1988), 7215; X. G. Wen, A. Zec, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), 1025.
4. S. Chakravarty, B. I. Halperin, D. R. Nelson, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 1057.
5. А. И. Ахиезер и др., *Спиновые волны*, М. Наука, 1967.
6. И. Я. Арефьева, Вопросы квантовой теории поля и статистической физики (записки научных семинаров ЛОМИ), Л.: ЛОМИ, 1978, т. 77; I. Ya. Aref'eva, S. I. Azakov, Nucl. Phys. **B162** (1980), 298.
7. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainstein and V. I. Zacharov, Phys. Rep. **1984** (116), 103.
8. И. В. Криве, С. А. Нафтулин, ЯФ **52** (1990), no. 3(9), 855.
9. I. Dzialoshinsky, A. M. Polyakov, P. Wiegmann, Phys. Lett. **127A** (1988), 112; A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A3** (1988), 325.
10. P. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 821.

11. Э. Маделунг, *Математический аппарат физики*, М.: Наука, 1968.
12. В. М. Мостепаненко, Н. Н. Трунов, *Эффект Казимира и его приложения*, М. 1990.
13. E. Elizalde, K. Kirsten, *Topological symmetry breaking in self-interacting theories on toroidal space-time*, J. Math. Phys. **35**(3) (1994), 1260–1273; E. Elizalde, *An extension of the Chowla—Selberg formula useful in quantizing with the Wheeler—De Witt equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994), 3775–3785; E. Elizalde and A. Romeo, *Epstein function analysis of the Casimir effect at finite temperature for massive fields*, unpublished or preprint?
14. З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, М.: Наука, 1985.
15. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, М.: Наука, 1965.
16. C. A. Lütken and F. Ravndal, *A symmetry in the finite-temperature Casimir effect*, J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988), L793–L796.
17. А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, *Рекуррентные соотношения для обобщенных функций типа дзета-функций Римана-Эрмштейна*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физика, Астрономия **35** (1994), no. 1, 32–38.
18. F. Bloch, Ztschr. Phys. **52** (1928), 555.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

117454, ПРОСПЕКТ ВЕРНАДСКОГО, 78, МОСКВА, РОССИЯ